

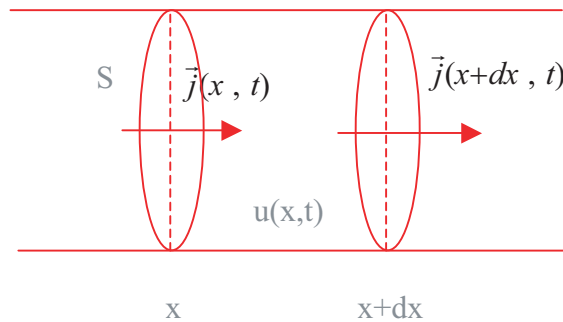
Quelques manifestations des transferts thermiques

1<sup>ère</sup> partie :  
**Thermodiffusion dans une barre**

**1.1 Équations générales**

1.1.1  $\vec{j}_Q(M, t)$  est un flux surfacique thermique de conduction, homogène à  $\frac{\text{masse}}{\text{temps}^3}$ , s'exprimant en  $W.m^{-2}$

1.1.2 :



le 1<sup>er</sup> principe appliqué à la tranche rigide  $\delta W = 0$  s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = \Phi_{entrant}(x, t) - \Phi_{sortant}(x + dx, t) = -S[j(x + dx, t) - j(x, t)]$$

or :  $U = u(x, t)(Sdx)$  d'où :

$$Sdx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -S \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} dx$$

soit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

1.1.3 la loi de Fourier s'écrit :  $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{grad}T$  donc  $\lambda$  s'exprime en  $WK^{-1}m^{-1}$

soit :

$$j(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$$

1.1.4 on a :

$$dU = Sdx du = c dm dT = c \mu Sdx dT$$

donc

$$u = u_0 + c \mu T$$

car  $c$  et  $\mu$  ne dépendent pas de  $T$ .

1.1.5 on remplace dans 1.1.2 :

$$\frac{\partial(u_0 + c\mu T)}{\partial t} = +\lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}$$

donc :

$$\mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

1.1.6 on en déduit :

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

$D = \frac{\lambda}{\mu c}$  s'exprimant en  $m^2 \cdot s^{-1}$  homogène à  $\frac{\text{longueur}^2}{\text{temps}}$ .

Attention : ce n'est pas une accélération :  $m \cdot s^{-2}$

## 1.2 Régime stationnaire

1.2.1 en régime stationnaire  $T$  ne dépend plus de  $t$  donc  $T = T(x)$ , soit (1) :

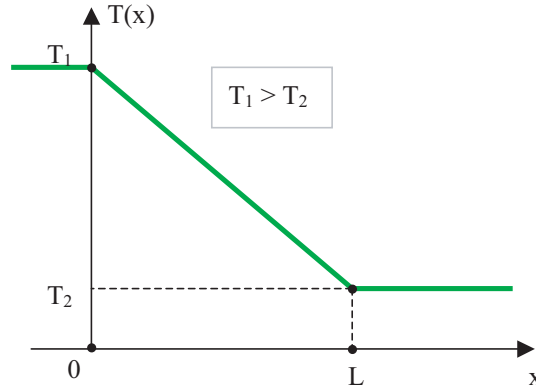
$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

1.2.2 on intègre :  $T(x) = \alpha x + \beta$  tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(0) = \beta = T_1 \\ T(L) = \alpha L + \beta = T_2 \end{cases}$$

donc :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$



1.2.3 la loi de Fourier donne :  $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \vec{u}_x$ , uniforme et en accord avec l'existence de la paroi latérale athermane.

## 1.3 Régime transitoire

1.3.1 graphiquement :

$$T_1 = T(x = 0, t) = 20^\circ C = 293 K$$

$$T_2 = T(x = L, t) = 60^\circ C = 333 K$$

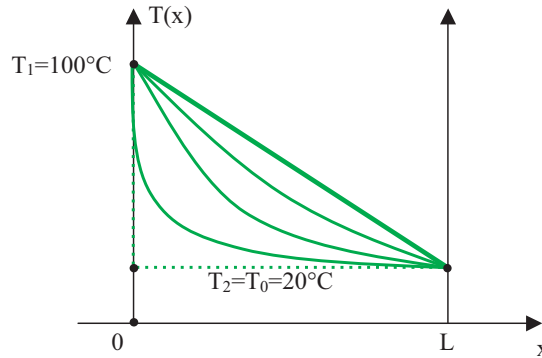
$$T_0 = T(x, t = 0) = 100^\circ C = 373 K$$

(uniforme).

1.3.2

1.3.2.1 il faut laisser la surface  $x = L$  en contact avec l'air ambiant qui constitue une source de chaleur en bonne approximation!

1.3.2.2 :



## 2<sup>ème</sup> partie : Contacts thermiques

### 2.1 Modèle statique

2.1.1 de même qu'en 1.2.2 :

$$T_a(x) = T_0 + \frac{T_0 - T_1}{L_1} x$$

$$T_b(x) = T_0 + \frac{T_2 - T_0}{L_2} x$$

2.1.2 dans  $C_a$  :  $\vec{j}_Q(x) = -\lambda_1 \frac{dT}{dx} \vec{u}_x = \lambda_1 \frac{T_1 - T_0}{L_1} \vec{u}_x$  et dans  $C_b$  :  $\vec{j}_Q(x) = -\lambda_2 \frac{dT}{dx} \vec{u}_x = \lambda_2 \frac{T_0 - T_2}{L_2} \vec{u}_x$

2.1.3 par continuité du courant thermique diffusif en  $x = 0$  :

$$\lambda_1 \frac{T_1 - T_0}{L_1} = \lambda_2 \frac{T_0 - T_2}{L_2} \Rightarrow T_0 = \frac{\frac{\lambda_1 T_1}{L_1} + \frac{\lambda_2 T_2}{L_2}}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}}$$

(Millman)

2.1.4 A.N :  $T_1 = 37^\circ C = 310 K$  et  $L_1 = L_2$  donc :  $T_0 = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$  tel que :  $\lambda_1 = 10 WK^{-1}m^{-1}$

|  | main-bois                  | main-acier                  |
|--|----------------------------|-----------------------------|
| sensation de chaud ( $T_2 = 100^\circ C = 373 K$ ) | $T_0 = 316 K = 43^\circ C$ | $T'_0 = 367 K = 94^\circ C$ |
| sensation de froid ( $T_2 = 10^\circ C = 283 K$ )  | $T_0 = 308 K = 35^\circ C$ | $T'_0 = 285 K = 12^\circ C$ |

Lorsqu'il fait chaud, au toucher on sent l'acier plus chaud que le bois ( $94^\circ C > 43^\circ C$ ) et lorsqu'il fait froid, au toucher on sent l'acier plus froid que le bois ( $13^\circ C < 35^\circ C$ )

### 2.2 Modèle dynamique

2.2.1 L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{dT}{du} + 2u\dot{T} = 0$$

par séparation de variable :

$$\frac{dT}{T} = -2u du$$

soit :

$$\ln(\dot{T}) = -u^2 + cte \Rightarrow \dot{T} = cte' \exp -u^2$$

soit :

$$T(u) = cte_1 + cte_2 \int_0^u \exp -v^2 dv = A + B \operatorname{erf}(u)$$

**2.2.2** pour  $C_a$  et  $t > 0$  :

$$\text{on a : } x \rightarrow -\infty \Rightarrow u = \frac{x}{\sqrt{4D_1t}} \rightarrow -\infty$$

$$\text{donc : } T(-\infty) = T_1 = A_1 + B_1 \operatorname{erf}(-\infty) = A_1 - B_1$$

$$\text{et on a : } x = 0 \Rightarrow u = \frac{x}{\sqrt{4D_1t}} = 0$$

$$\text{donc : } T(0) = T_0 = A_1 + B_1 \operatorname{erf}(0) = A_1$$

soit :

$$A_1 = T_0$$

$$B_1 = T_0 - T_1$$

de même pour  $C_b$  et  $t > 0$  :

$$\text{on a : } x \rightarrow +\infty \Rightarrow u = \frac{x}{\sqrt{4D_2t}} \rightarrow +\infty$$

$$\text{donc : } T(+\infty) = T_2 = A_2 + B_2 \operatorname{erf}(+\infty) = A_2 + B_2$$

$$\text{et on a : } x = 0 \Rightarrow u = \frac{x}{\sqrt{4D_2t}} = 0$$

$$\text{donc : } T(0) = T_0 = A_2 + B_2 \operatorname{erf}(0) = A_2$$

soit :

$$A_2 = T_0$$

$$B_2 = T_2 - T_0$$

**2.2.3** dans le cylindre  $C_a$  on a :

$$\vec{j}_Q^{(a)}(x, t) = -\lambda_1 \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \vec{u}_x = -\lambda_1 \frac{dT(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \vec{u}_x$$

$$\text{or : } \frac{d \operatorname{erf}(u)}{du} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp -u^2 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4D_1t}}$$

il vient :

$$\vec{j}_Q^{(a)}(x, t) = -(T_0 - T_1) \frac{E_1}{\sqrt{\pi t}} \exp \left( -\frac{x^2}{4D_1t} \right) \vec{u}_x$$

$$\text{tel que : } E_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{D_1}} = \sqrt{\mu_1 c_1 \lambda_1}, \text{ s'exprimant en } W.m^{-2}.K^{-1}.s^{1/2}$$

**2.2.4** de même dans le cylindre  $C_b$  :

$$\vec{j}_Q^{(b)}(x, t) = -(T_2 - T_0) \frac{E_2}{\sqrt{\pi t}} \exp \left( -\frac{x^2}{4D_2t} \right) \vec{u}_x$$

$$\text{tel que : } E_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{D_2}} = \sqrt{\mu_2 c_2 \lambda_2}$$

**2.2.5** continuité de  $\vec{j}_Q(x, t)$  en  $x = 0, t > 0$  :

$$(T_0 - T_1)E_1 = (T_2 - T_0)E_2 \Rightarrow T_0 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$$

le modèle dynamique fait intervenir la masse volumique et la capacité calorifique des corps !

**2.2.6** A.N :  $T_1 = 37^\circ C = 310 K$  et  $E_1 = 1.8 \cdot 10^3 SI$

|  | main-bois                  | main-acier                  |
|--|----------------------------|-----------------------------|
| sensation de chaud ( $T_2 = 100^\circ C = 373 K$ ) | $T_0 = 321 K = 48^\circ C$ | $T'_0 = 366 K = 93^\circ C$ |
| sensation de froid ( $T_2 = 10^\circ C = 283 K$ )  | $T_0 = 305 K = 32^\circ C$ | $T'_0 = 286 K = 13^\circ C$ |

Le modèle statique est suffisant pour décrire le contact main-acier vue la forte effusivité de l'acier.

**2.3** non, les deux bouteilles mises au frigo suffisamment longtemps auront toutes deux la même température  $5^\circ C$ , c'est juste la sensation de la main qu'on vient d'étudier qui donne ce sentiment car  $E_{verre} \gg E_{plastique}$  !

### 3<sup>ème</sup> partie : Analogies thermoélectriques

#### 3.1 Résistances thermiques

**3.1.1** on a :  $\Phi_{th}^c = \int_{S(x=cte)} \vec{j}_Q(x) \cdot d\vec{S} = j_Q(x)S$

or :  $j_Q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_0 - T_L}{L}$

donc :

$$\Phi_{th}^c = \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_L) \Rightarrow R_{th}^c = \frac{T_0 - T_L}{\Phi_{th}^c} \frac{L}{\lambda S}$$

#### 3.1.2

**3.1.2.1** la loi d'OHM locale :  $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \text{grad}V$

tel que :  $\vec{j}$  vecteur densité volumique de courant électrique,  $\gamma$  la conductivité électrique du milieu,  $V$  le potentiel électostatique ; valable en régime statique en absence de champ magnétique , pour un faible champ électrique

**3.1.2.2** par analogie :

- $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T \longleftrightarrow \vec{j} = -\gamma \vec{\nabla} V$
- $\lambda \longleftrightarrow \gamma$
- $\Phi_{th}^c \longleftrightarrow I$  intensité de courant
- $T \longleftrightarrow V$
- $T(0) - T(L) \longleftrightarrow U$  tension ou ddp

**3.1.3** deux résistors thermiques montés en série sont parcourus par le même flux thermique  $\Phi_{th}^c$  et

$$R_{th,eq} = R_{th,1} + R_{th,2}$$

deux résistors thermiques montés en parallèle sont soumises au même écart de température  $\Delta T$  et

$$R_{th,eq} = \frac{R_{th,1} \cdot R_{th,2}}{R_{th,1} + R_{th,2}}$$

**3.1.4** la loi de NEWTON s'écrit :

$$\Phi_{th}^{cc} = h(T - T_a)S = \frac{(T - T_a)}{R_{th}^{cc}}$$

tq :  $R_{th}^{cc} = \frac{1}{hS}$  avec  $h$  coefficient de transfert conducto-convectif,  $S$  la surface de contact solide-fluide

#### 3.1.5

3.1.5.1 la loi de STEPHAN donne le flux surfacique émis : par le corps solide  $\varphi_{th}^r = \sigma T^4$ , et par l'environnement ambiant  $\varphi_{th}^r = \sigma T_a^4$

3.1.5.2 le flux thermique radiatif total s'écrit sortant algébriquement du solide :  $\Phi_{th}^r = \sigma(T^4 - T_a^4)S$

3.1.5.3 si  $T \approx T_a$  alors :

$$\Phi_{th}^r = \sigma(T^4 - T_a^4)S = \sigma S(T^3 + T^2T_a + TT_a^2 + T_a^3)(T - T_a) \approx 4\sigma ST_a^3(T - T_a)$$

donc  $R_{th}^r = \frac{1}{4\sigma ST_a^3}$

3.1.5.4 A.N :  $R_{th}^r = 0.11 \text{ KW}^{-1}$

### 3.2 Bilan thermique du corps humain

3.2.1 régime stationnaire

3.2.1.1 la puissance métabolique  $P_M = PMJ \times \frac{1}{24 \times 3600} = 150 \text{ W}$

le flux thermique par rayonnement  $\Phi_{th}^r = \frac{(T - T_a)}{R_{th}^r} = 75.2 \text{ W}$

le flux thermique par convection  $\Phi_{th}^{cc} = \frac{(T - T_a)}{R_{th}^{cc}} = 59.9 \text{ W}$

3.2.1.2 la puissance  $P_e = m_e L \times \frac{1}{24 \times 3600} = 8.3 \text{ W}$ .

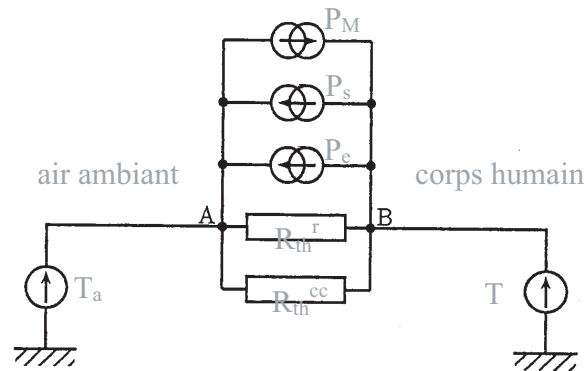
3.2.1.3 la puissance résiduelle  $P_s = P_M - \Phi_{th}^{cc} - \Phi_{th}^r - P_e = 6.7 \text{ W}$ , qui sert à accomplir les autres efforts physiques (muscles) et mentales (résoudre cette épreuve!), aussi pour chauffer l'air inspiré froid et expiré chaud!

3.2.1.4 on a la loi des noeuds en A :

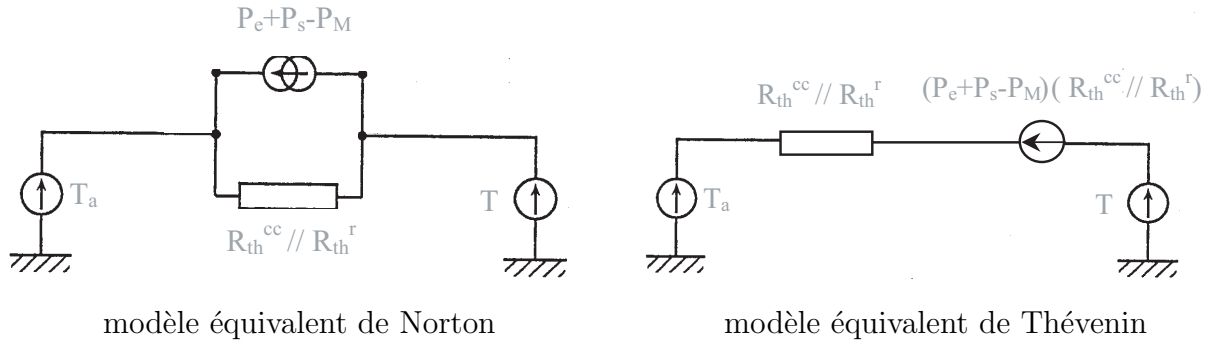
$$-I + I_1 + I_2 + \frac{V - V_a}{R_1} + \frac{V - V_a}{R_2} = 0$$

3.2.1.5 par analogie thermoélectrique le bilan thermique du corps humain s'exprime (3.2.1.3) :

$$-P_M + P_e + P_s + \frac{T - T_a}{R_{th}^{cc}} + \frac{T - T_a}{R_{th}^r} = 0$$



3.2.1.6 :



### 3.2.2

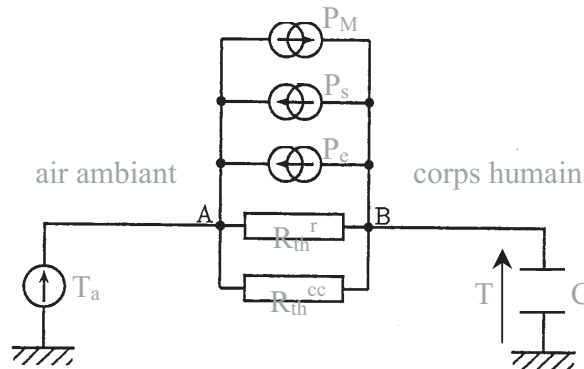
3.2.2.1 le corps humain de volume constant vérifie le 1<sup>er</sup> principe :

$$C \frac{dT}{dt} = P_m - P_e - P_s - \left[ \frac{1}{R_{th}^{cc}} + \frac{1}{R_{th}^r} \right] (T - T_a) \quad (2')$$

donc  $\tau = \frac{CR_{th}^{cc}R_{th}^r}{R_{th}^{cc} + R_{th}^r}$  et  $\Lambda = \frac{P_m - P_e - P_s}{C}$

3.2.2.2 en régime stationnaire  $\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow -P_M + P_e + P_s + \frac{T - T_a}{R_{th}^{cc}} + \frac{T - T_a}{R_{th}^r} = 0$  compatible avec ceux du §3.2.1

3.2.2.3 l'équation (2') est commode avec :



3.2.2.4 on résout :

$$T(t) - T_a = \alpha \exp -\frac{t}{\tau} + \tau \Lambda$$

or à  $t = 0$  :

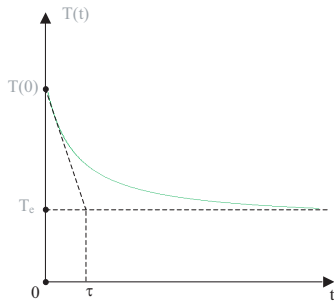
$$\alpha = T(0) - T_a - \tau \Lambda$$

soit :

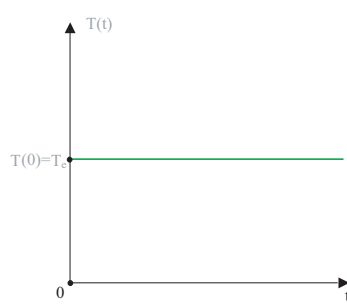
$$T(t) = T_a + \tau \Lambda + [T(0) - T_a - \tau \Lambda] \exp -\frac{t}{\tau}$$

3.2.2.5 A.N :  $T_e = T(\infty) = T_a + \tau \Lambda = 33^\circ C = 306 K$  qui est celle du régime statique par homéothermie !

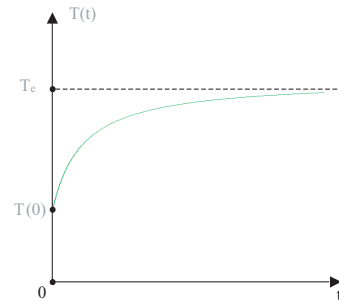
3.2.2.6 on a :  $T(t) = T_e + (T(0) - T_e) \exp -\frac{t}{\tau}$



le corps se refroidit



le corps est en équilibre



le corps se réchauffe

$\tau$  est déterminé par l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote.

3.2.2.7 on a :

$$\tau_{eau} = \frac{\tau}{25} \Leftrightarrow \frac{C R_{th,eau}^{cc} R_{th}^r}{R_{th,eau}^{cc} + R_{th}^r} = \frac{1}{25} \frac{C R_{th}^{cc} R_{th}^r}{R_{th}^{cc} + R_{th}^r}$$

$$\Rightarrow R_{th,eau}^{cc} = \frac{1}{\frac{24}{R_{th}^r} + \frac{25}{R_{th}^{cc}}} = 3.03 \times 10^{-3} KW^{-1}$$

le coefficient de transfert conducto-convectif :  $h_{corps-eau} > h_{corps-air}$

### 3.3 Effet des vêtements sur le bilan thermique du corps

la nouvelle surface du corps en contact avec l'air est  $S' = 0.2 S$  et  $R \propto \frac{1}{S}$

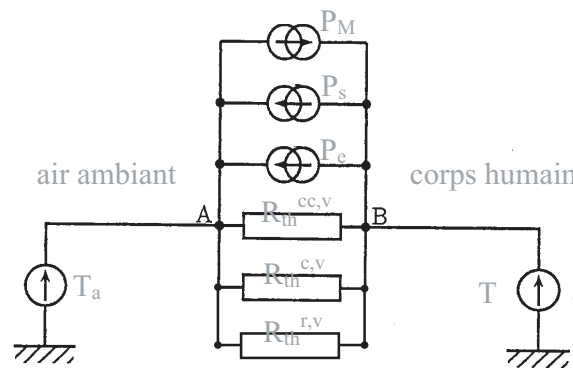
3.3.1  $R_{th}^{cc,v} = \frac{R_{th}^{cc}}{0.2} = 835 \cdot 10^{-3} KW^{-1}$  et  $R_{th}^{r,v} = \frac{R_{th}^r}{0.2} = 665 \cdot 10^{-3} KW^{-1}$

3.3.2 en fait  $S'' = 0.8 S$  du corps est en contact avec les vêtements qui sont équivalent à une résistance thermique soumise à l'écart  $T - T_a$

le bilan s'écrit en régime statique :

$$-P_M + P_e + P_s + \frac{T - T_a}{R_{th}^{cc,v}} + \frac{T - T_a}{R_{th}^{r,v}} + \frac{T - T_a}{R_{th}^{c,v}} = 0$$

3.3.3 le nouveau schéma du circuit thermique :



3.3.4 A.N :  $T = 33^\circ C = 306 K$  ,  $T'_a = 20^\circ C = 293 K$  et  $T_a = 23^\circ C = 296 K$

$$R_{th}^{c,v} = \frac{T - T'_a}{P_M - P_e - P_s - \frac{T - T'_a}{R_{th}^{cc,v}} - \frac{T - T'_a}{R_{th}^{r,v}}} = \frac{T - T'_a}{\frac{T - T_a}{R_{th}^{cc}} + \frac{T - T_a}{R_{th}^r} - \frac{T - T'_a}{R_{th}^{cc,v}} - \frac{T - T'_a}{R_{th}^{r,v}}} = 130 \cdot 10^{-3} KW^{-1}$$

fin du corrigé